Matemática aplicada na busca do ótimo[1].

Rodrigo Pacheco Cardoso[2]; **Sérgio Luciano Avila**[3]

[1] Trabalho executado com recursos do Edital 12/2012, da Pró-Reitoria de pesquisa, Pós-Graduação e Inovação.
[2] Estudante do curso técnico integrado de Eletrotécnica, Florianópolis, IFSC, rafaelpachecocardoso@gmail.com
[3] Professor do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica, Florianópolis, IFSC, sergio.avila@ifsc.edu.br

RESUMO: Com o avanço da matemática, física e da computação, passa a ser natural o uso do computador para auxiliar os técnicos. Este trabalho disserta sobre a interação entre o projetista e o computador quando o objetivo for a concepção de novos produtos ou soluções. Em específico, discute-se métodos de otimização e suas aplicações. Um exemplo conceitual é apresentado com a otimização de um dispositivo eletromagnético.

Palavras Chave: Otimização, Projeto Assistido por Computador, Eletromagnetismo.

I. INTRODUÇÃO

Com o avanço das ciências matemáticas, físicas e recentemente da computação, passa a ser natural o uso do computador para auxiliar as pessoas. Esta interação entre o projetista e o computador, quando o objetivo for à concepção de novos produtos ou soluções, vem sendo chamada pelos profissionais da área como Projeto Assistido por Computador [1].

Na busca por soluções para problemas que podem ser encontrados na concepção de produtos, o projetista estabelece a obtenção dos máximos e mínimos de uma função. Processos de maximização e minimização podem ser chamados de otimização. Otimizar significa buscar a melhor solução para um determinado problema [2-3].

Este artigo refere-se a conceitos dos processos que interligam o utilizador aos programas computacionais e a principais definições que fazem parte do campo da otimização de sistemas.

Projeto Assistido por Computador (PAC) ou Computer Aided Design (CAD)

A Figura 1 ilustra a relação entre máquina e projetista, sendo este qualquer pessoa na busca por um produto ou solução. Na parte mais a esquerda da está o projetista, o qual é muitas vezes um usuário do modelo físico/matemático proposto por outros. Na parte mais a direita da está o Matemático, o Físico, ou o Engenheiro que transforma o problema real em um modelo representativo. Fazendo a interação entre projetista e modelo representativo está o chamado Projeto Assistido por Computador (PAC), que se define como um conjunto de instrumentos que auxiliam o projetista a obter a melhor solução ou compreensão para o seu problema, citam-se: ajuste de parâmetros que tornem o modelo condizente a realidade; variadas formas de visualização do problema e ferramentas de obtenção da melhor solução possível. Quanto mais preciso o modelo representativo, mais correta será a resposta deste a uma simulação da realidade [2-3].

Dentre as muitas ferramentas relacionadas ao PAC, este texto trata especificamente de Otimização. As próximas seções têm por objetivo introduzir o tema.

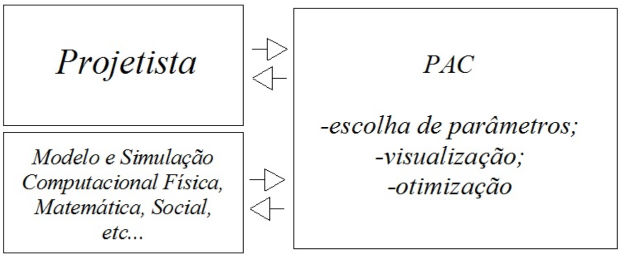

Figura 1- Ilustração simplificada de Projeto Assistido por Computador. [Do Autor]

OTIMIZAÇÃO

Processos de maximização e minimização podem ser chamados de otimização. Otimizar significa buscar a melhor solução para um determinado problema [2-3]. Como exemplo simples de um problema de otimização, pode-se citar o *Problema do Caixeiro Viajante* (PCV) [4]. O viajante tem que visitar várias cidades conectadas por rodovias, pessoalmente. O PCV surge quando o caixeiro tem por objetivo realizar uma viagem circular (com o ponto de partida coincidindo ponto de chegada da viagem), sem passar pela mesma cidade duas vezes e no menor percurso possível. Como determinar o trajeto que satisfaça ao problema? A Figura 2 representa um conjunto de cidades e possíveis trajetos entre elas, exemplificando o PCV.

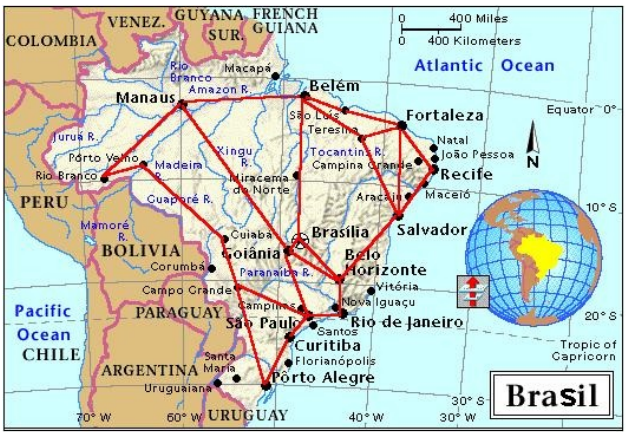

Figura 2- Problema do Caixeiro Viajante [5]

Existe um grande número de trajetos possíveis, ou seja, soluções adequadas. O trajeto ótimo, conforme posto nas especificações do problema, é aquele que percorre todas as cidades, uma única vez e no menor percurso possível [4].

ÓTIMO

Sistemas de PAC visando otimização definem-se em dois atores: modelo de problema, que possui uma avaliação da figura de mérito associada aos parâmetros do problema; e o mecanismo “otimizador” que utiliza da figura de mérito para fornecer uma tentativa de solução. O resultado da associação desses fatores, com ou sem a intervenção do usuário, produz a chamada solução ótima [2]. É importante esclarecer a diferença entre uma solução possível e uma ótima:

- Uma solução possível é toda aquela que mediante a introdução da figura de mérito do problema de otimização é apresentada pelo agente PAC como uma solução adequada, que atende ao modelo do problema e as suas restrições;

- A solução ótima é aquela que exprime em seu significado o melhor e mais alto nível de otimização da variável ou parâmetro tratado.

O teorema de Kuhn Tucker [6] define matematicamente a solução ótima.

CONCEITOS BÁSICOS e TERMINOLOGIA SOBRE OTIMIZAÇÃO

Os principais termos empregados no contexto de otimização são [7]:

Função objetivo: equação matemática que representa o que se deseja melhorar em um dispositivo. Tem como sinônimos: critério de otimização, função custo ou ainda função de mérito (*fitness function*);

Parâmetros: correspondem às variáveis da função objetivo. São ajustados durante o processo de otimização visando obter a(s) solução(ões) ótima(s). Podem ser chamados de variáveis de otimização, variáveis objeto ou de concepção (*design variables*);

Espaço de busca: domínio (delimitado ou não) que contém os valores dos parâmetros. Corresponde ao espaço de soluções. A dimensão do espaço de busca é definida pelo número de parâmetros envolvidos nas soluções (por exemplo, se cada solução é formada por três parâmetros, o espaço de busca é tridimensional). É também conhecido como espaço de parâmetros ou ambiente;

Espaço de objetivos: conjunto imagem do espaço de busca determinado por todos os valores possíveis das funções objetivo;

Restrições: especificações do problema que delimitam os espaços de parâmetros (restrições construtivas, etc.) e/ou que não permitem determinada faixa de valores nos objetivos (por exemplo, requisitos de projeto podem impor que abaixo de certo valor a solução não seja considerada);

Domínio realizável: região do espaço (dos parâmetros e/ou objetivos) onde as restrições são respeitadas. É também conhecido como espaço viável, admissível ou factível;

Domínio não-viável: região do espaço onde as restrições são violadas.

Os mecanismos para a exploração do espaço de busca, específicos a cada metodologia de otimização, são condicionados por parâmetros de controle (números de iterações, direção de procura, verificação de convergência, etc.) e por condições iniciais (valores iniciais dos parâmetros, limites dos domínios, etc.).

A figura 3 ilustra um arranjo genérico das metodologias de otimização.

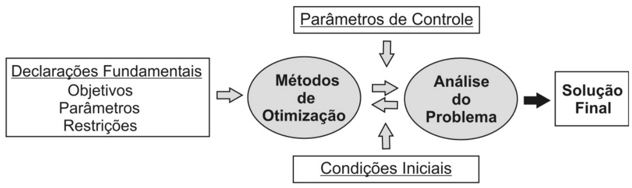

Figura 3 - Ilustração da disposição dos diversos componentes em uma metodologia de otimização. [Do Autor]

A Figura 4 apresenta um exemplo de problema com duas variáveis e dois objetivos sujeitos a duas restrições (g_1 e g_2) sobre os parâmetros e a uma restrição sobre os objetivos (e_1). Nesta figura são mostradas algumas situações particulares com o intuito de ilustrar os conceitos apresentados. De modo a ser o mais geral possível, os ótimos das funções não são definidos como pontos em termos de maximização ou minimização, mas por uma região no espaço dos objetivos. Esta representação permite notar que:

A correspondência de uma solução de X (espaço de parâmetros) em Y (espaço de objetivos) nem sempre é possível, notadamente para as soluções não factíveis;

Mesmo as soluções que atendem às restrições impostas aos parâmetros estão também sujeitas às exigências impostas aos objetivos;

Duas soluções muito distintas (ou diferentes) no espaço de parâmetros podem corresponder a pontos próximos no espaço de objetivos (problema multimodal). O contrário também é possível: duas soluções próximas no espaço de parâmetros podem gerar pontos distantes no espaço de objetivos (descontinuidades ou região muito ‘sensível’).

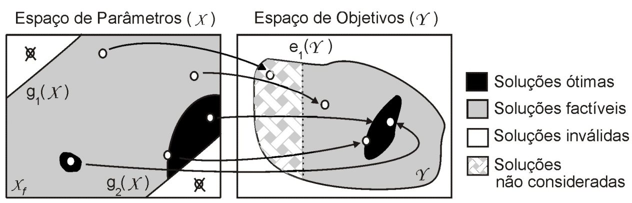

Figura 4 – Relações entre os diferentes espaços de um problema. [Do Autor]

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Um problema de otimização podem ser resolvidos por meio de métodos numéricos adotados para determinação da solução ótima. De acordo com a natureza do problema, podem-se dividir os métodos "otimizadores" em dois grandes grupos: programação linear e programação não-linear. Aqui estão apresentados apenas os detalhes mais importantes de cada grupo, a fim de que se possam caracterizar os tipos de problemas em que eles podem ser utilizados.

Programação Linear

A programação linear (PL) tem como objetivo encontrar a solução ótima de problemas que sejam perfeitamente representados por um conjunto de equações lineares. O propósito da PL está em minimizar ou maximizar uma função linear, respeitando-se um sistema linear de desigualdades denominadas restrições. As restrições do conjunto determinam um semi-espaço chamado de conjunto de soluções viáveis. A melhor das soluções viáveis, isto é, aquela que minimiza ou maximiza a função objetivo, é chamada solução ótima [7]. O *Problema do Caixeiro Viajante* (PCV) é um exemplo de problema linear de otimização.

Programação Não-Linear

Para problemas que são descritos por sistemas de equações não-lineares utiliza-se a Programação Não-Linear (PNL). Pode-se dividir a PNL em três grandes famílias de métodos: os Determinísticos, os Estocásticos e os Enumerativos [8].

Métodos Determinísticos

Os métodos determinísticos utilizam-se de informações como a derivada e o vetor gradiente da função matemática que define o comportamento do sistema e por meio de uma matemática científica encontra uma região de soluções possíveis ao problema de otimização. Na resolução de problemas por meio dos Métodos Determinísticos utiliza-se do passo de cálculo que controla a evolução da solução. O valor deste passo de cálculo pode ser obtido por métodos do tipo *Golden Section*, *Fibonacci*, dentre outros. Já a direção de busca é responsável pela direção da trajetória até a solução e pode ser determinada por muitos métodos, dentre os quais, o de *Newton* e o *BFGS* [7].

Métodos Estocásticos

Os métodos estocásticos têm como principal característica a busca pelo ótimo através de regras de probabilidade trabalhando de maneira "aleatória orientada". Tais métodos utilizam apenas as informações contidas na função de otimização, não requerendo informações sobre suas derivadas ou possíveis descontinuidades. Estratégias estocásticas são de simples implementação e entendimento quando comparado aos métodos determinísticos. Estas técnicas ganharam popularidade com a evolução dos computadores, já que requerem um grande número de análises do problema. Isto é necessário para que se dê chance ao método de explorar devidamente todo o universo de busca onde está contida a solução ótima [7].
Pela sua natureza, os métodos estocásticos são frequentemente utilizados naqueles problemas onde o acesso a sua derivada é complexo, por exemplo, em problemas de eletromagnetismo onde utiliza-se métodos numéricos para a análise do comportamento dos campos eletromagnéticos.
Citam-se como exemplos de técnicas estocásticas as Estratégias Evolucionárias e o Algoritmos Genéticos. As duas primeiras imitam o comportamento evolucionário da natureza e o recozimento simulado baseia-se no comportamento dos fluidos em resfriamento.

Métodos Enumerativos

A ideia de procura dos métodos enumerativos (busca exaustiva) é simples. Estipula-se um universo finito de busca, discretiza-se este espaço de modo a representar todas as possíveis soluções, e verificam-se todos os pontos. É evidente que a implementação é muito simples de ser feita, mas é também óbvio que esta técnica se torna inviável para problemas onde o universo de busca é muito grande. Além disso, uma discretização, por mais fina que seja, dificilmente cobrirá todos os pontos possíveis [7].

A única técnica que com certeza obtêm a solução ótima é a dos métodos enumerativos, em que todas as possibilidades são verificadas. Mas, como visto no parágrafo anterior, isto é muitas vezes impossível. Com métodos determinísticos tem-se certeza de que se alcançou um mínimo ou máximo, mas não se tem certeza se este mínimo ou máximo é global ou local. Outra opção é trabalhar com métodos estocásticos que, através da repetição (isto é, executando-se o programa inúmeras vezes e ocorrendo a repetição da resposta), poder-se-ia afirmar que a resposta repetida é a solução ótima com uma boa chance de sucesso. Uma estratégia interessante consiste em trabalhar com métodos híbridos: inicialmente utilizam-se métodos estocásticos para determinar a região que contém o extremo global e, após, aplica-se uma técnica determinística buscando o ponto ótimo.

EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Problema do Caixeiro Viajante Aplicado ao Estado de Santa Catarina

O Caixeiro Viajante deseja passar por cinco cidades do estado de Santa Catarina: Florianópolis, Jaraguá do Sul, Canoinhas, Xanxerê e Lages. Ele não deseja passar pela mesma cidade por mais uma vez; e a cidade de partida e de chegada é Florianópolis, conforme Figura 5.
Antes de partir para a resolução do problema, algo importante a se fazer é a inserção dos conceitos de otimização aplicados as informações trazidas no enunciado da questão. São eles:
Objetivo: menor trajetória do CV, respeitando as restrições;

Função objetivo: medição da distancia percorrida; Parâmetros: a distância percorrida;
Espaço de busca: As variadas soluções para este problema (domínio), no caso, soluções encontradas num espaço de busca unidimensional, pois se trata de um parâmetro (distância);
Espaço de objetivos: conjunto imagem do espaço de busca determinado por todos os valores possíveis das funções objetivo (unidimensional);
Restrições: o problema se restringe a modelos de trajetórias circulares, ou seja, que comecem numa cidade, Florianópolis, e que passe por todas as outras quatro cidades por uma única vez, sendo que o fim do trajeto seja novamente a cidade de origem do percurso;
Domínio realizável: conjunto de soluções que abrange especificamente as que atendem as restrições, e assim contém, consequentemente, aquela que será a solução ótima;
Domínio não-viável: região do espaço onde as restrições são violadas, e onde assim não podemos encontrar uma solução ótima.

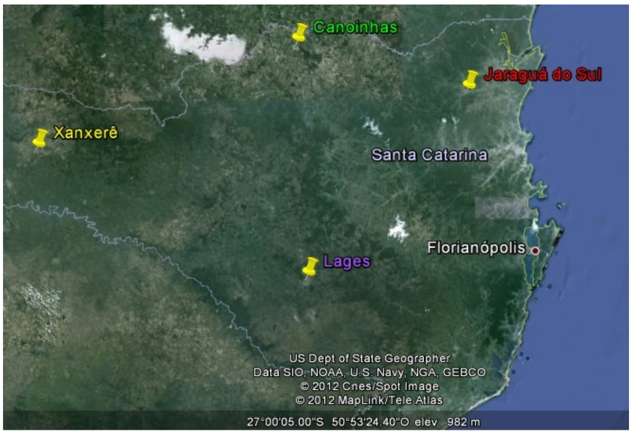

Figura 5 - Cidades presentes no trajeto do CV [Do Autor]

Soluções possíveis:
Dentre as variadas maneiras de obter as soluções possíveis apreciáveis, optou-se pela arbitragem de trajetórias combinadas. Nela, devem-se escolher os possíveis trajetos, respeitando as restrições do problema, baseando-se nas medições entre as distâncias entre as cidades e do trajeto resultante por meio de cálculo aritmético. Entre estes:
A. Trajeto onde parte-se de Florianópolis e segue em sequência para Jaraguá do Sul, Canoinhas, Xanxerê, Lages, e por fim retornando a Florianópolis, com medição de 885km;
B. Trajeto onde parte-se de Florianópolis, e segue-se para Lages, em seguida Xanxerê, Canoinhas, Jaraguá do Sul, e por fim retornando a Florianópolis, com medição de 885km;
C.Trajeto com saída de Florianópolis, e segue-se para Xanxerê, Jaraguá do Sul, Lages, Canoinhas e retornando a Florianópolis, com medição de 1330km.

Existem várias outras combinações que podem trazer soluções possíveis. As três apresentadas (A, B e C) são exemplos.

Solução ótima:
Por meio de comparação, podem-se obter com sucesso duas soluções com o mesmo mérito neste problema, são estas: as trajetórias A e B, ambas com o percurso total finalizando-se em 885 km, como se vê na Figura 6. A trajetória C obteve um 'desempenho' inferior em relação a A e B, com o trajeto total finalizando-se em 1330 km de percurso, ou seja, não é a ótima nesse caso, pois, mesmo atendendo todas as restrições do problema tem a distância total do percurso mais de 30% maior que as trajetórias A e B.

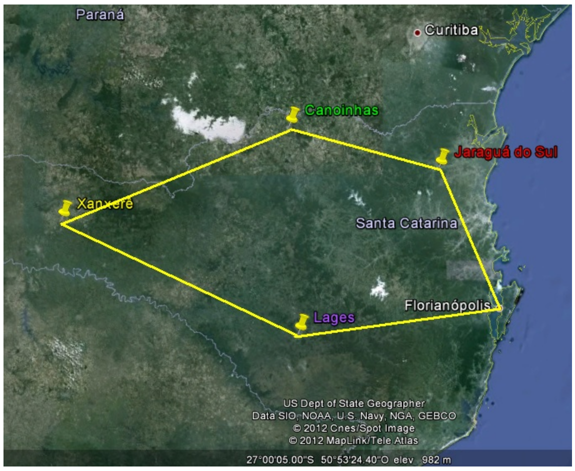

Figura 6 – Trajetória A ou B [Do Autor]

Chave Magnética

Em uma chave magnética, ilustrada na Figura 7, observa-se inúmeros fatores que sob ponto de vista de um projetista podem ser utilizados como exemplo de otimização, entre eles: o dimensionamento de corrente elétrica na bobina que está energizada pela fonte de tensão; o número espiras na bobina; e a área da seção quadrada de material ferromagnético para gerar determinada força desejada entre duas partes do núcleo. No exemplo apresentado, tem-se como objetivo obter 1000Ae de força a parte N e S.

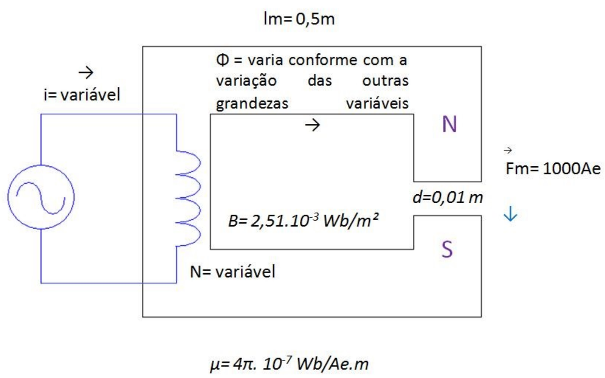

Figura 7 – Chave magnética – circuito representativo [Do Autor]

Definições:
lm= Comprimento médio magnético do núcleo
B= Indução magnética gerada na bobina
Fm= Força Magnetomotriz
d= Distância entre as duas partes não unidas no núcleo magnético
μ= Permeabilidade magnética do ar

Função objetivo: equação do cálculo da força, que deve ser de 1000Ae entre N e S;
Parâmetros: corrente elétrica aplicada ao circuito; número de espiras da bobina e área da seção retangular do núcleo ferromagnético;
Espaço de busca: domínio que envolve um espaço delimitado que contém os valores de cada parâmetro, e onde conseguintemente estará o espaço das soluções. Neste caso, a solução se encontra num espaço de busca tridimensional;
Espaço de objetivos: conjunto imagem do espaço de busca determinado por todos os valores possíveis da função objetivo;
Restrições: a corrente não pode ser maior que 8A; não podemos ter mais de 300 espiras;
Domínio realizável: região do espaço (dos parâmetros e/ou objetivos) onde as restrições são respeitadas. É também conhecido como espaço viável, admissível ou factível;
Domínio não-viável: região do espaço onde as restrições são violadas.

Soluções:
Utilizando os princípios de busca exaustiva, obedecendo apenas à relação de interação entre as grandezas envolvidas nos parâmetros para obter a solução ótima, apresentam-se três soluções:
Solução A: i= 10A; N= 100 espiras e S= 0,01m^2;
Solução B: i= 2A; N= 500 espiras e S= 0,25m^2; e
Solução C: i= 4A; N= 250 espiras e S= 1,00m^2.

A solução A não atende a restrição de I < 8A. A solução B não atende a restrição de número de espirar < 300. Tem-se apenas a solução C como viável, e portanto, ela é considerada a melhor solução encontrada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste estudo pode-se observar de forma introdutória os conceitos referentes ao Projeto Assistido por Computador (PAC) e Otimização. O grande desafio aqui é traduzir uma matemática complexa para termos que discentes de cursos técnicos possam entender e aplicar em problemas do seu dia-a-dia. Neste contexto, fica a certeza que os exemplos aqui apresentados ilustram bem os conceitos e as potencialidades, objetivo maior deste trabalho, embora esteja aqui negligenciado a matemática.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da PRPPGI, a Direção de Pesquisa do Campus Florianópolis e ao Departamento Acadêmico de Eletrotécnica.

REFERÊNCIAS

1. DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS. CAD/CAM: Sistemas Integrados de Produção Visando Prototipagem Rápida. Disponível em: http://www.demec.ufmg.br/Grupos/Usinagem/CADCAM Acesso em: 06 de ago. 2012.

2. TAKAHASHI, R.H.C. *Otimização Escalar e Vetorial*. UFMG, Departamento de Matemática. Belo Horizonte, 2007.

3. AVILA, S.L. ; TRAVASSOS, X.L.Jr ; CARPES, W. P. Jr ; VASCONCELOS, J.A ; KRAHENBUHL, L. *An Educacional Tool for Teaching Optimization in Engineering, In 15th Conference on the Computation of Eletromagnetic Fields*- COMPUMAG, Liaoning 26-30 June, 2005, Chine.

4. ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN MOTION. Resolvendo o problema do caxeiro viajante com Algoritmos Genéticos Disponível em: http://aimotion.blogspot.com.br/2009/03/resolvendo-o-problema-do-caixeiro.html. Acesso em: 02 de ago. 2012.

5. MULTIVERSO. Teoria dos Grafos-Conceitos Básicos. Disponível em: http://pasteurjr.blogspot.com.br/2011/02/teoria-de-grafos-conceitos-basicos.html. Acesso em: 05 de ago. 2012.

6.KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. (1951). "Nonlinear programming". *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*: 481-492, Berkeley: University of California Press.

7. AVILA, S.L. *Otimização Multiobjetivo e Análise de Sensibilidade Para Concepção de Dispositivos*. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2006.

8. M. S. Bazaraa, H. D. Sherali and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming – Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

9. SILVA, G. V.; SILVEIRA, J. ; LÚCIO, J. C. M. *Eletromagnetismo.* Departamento Acadêmico de Eletrotécnica - Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Santa Catarina. Florianópolis, 2003.